**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC- CTC**

**DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMO**

**Prof. Alexandre Gonçalves Silva**

**Aluno: Osmar de Oliveira Braz Junior**

# 

# Questão 4

4. Resolva as seguintes recorrências por meio do **método de iteração** ou **expansão telescópica**, e faça a prova, por indução, da fórmula fechada:

(a) **T(1) = 0 ; T(n) = T(n - 1) + c ; c constante e n > 1**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = T(n - 1) + c

2) T(n) está escrito em função de T(n-1)

3) Isole as equações para T(n-1) e T(n-2):

T(n-1) = T(n-2) + c

T(n-2) = T(n-3) + c

4) Substitua T(n-1) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n-2)

* Substituindo o valor isolado de T(n-1) em

T(n) = T(n-1) + c

Temos

T(n) = (T(n-2) + c) + c

* Agora substituindo o valor de T(n-2) em

T(n) = (T(n-2) + c) + c

Temos

T(n) = (T(n-2) + c) + c

T(n) = ((T(n-3) +c) + c) + c

ou

T(n) = T(n-1) +(n-1) c

Forma geral

T(n)=T(n-k) + k \* c

Considerando n = k

T(n) = T(n-n) + n \* c

T(n) = T(0) + n \* c

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = T(n - i) + (n-1)\*c

Calculado para n=5

T(5)= T(5-1) + c

T(5)= T(4) + c

T(4)= T(4-1) + c

T(4)= T(3) + c

T(3)= T(3-1) + c

T(3)= T(2) + c

T(2)= T(2-1) + c

T(2)= T(1) + c

T(1)= 0

T(2)= T(1) + c

T(2)= 0 + c

T(3)= T(2) + c

T(3)= 0 + c + c

T(4)= T(3) + c

T(4)= 0 + c + c + c

T(5)= T(4) + c

T(5)= 0 + c + c + c + c I (c repete n-1 vezes)

ou

T(5)= 4 \* c

ou

T(5)= (5-1) \* c

ou

T(n)= T(n-1) \* c

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

T(n- i) ⬄ T(1) ⬄ 0

n - i = 0

i = n

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = T(n -i) + (n-1)\*c

T(n) = T(1) + (n-1)\*c

T(n) = 0 + (n-1)\*c

T(n) = (n-1)\*c

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n)= (n-1) \* c ϵ Θ(n)

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é 0

T(n) = (n – 1) \* c

T(1) = (1 – 1) \* c

T(1) = (0) \* c

T(1) = 0 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n-1, isto é, T(n-1) =((n-1) - 1) \* c. Então, temos que verificar se T(n) = (n–1)\* c, sabendo-se que T(n) = T(n-1) \* c e partindo da H.I. que T(n-1) =((n-1) - 1) \* c

T(n)=T(n-1) + c //Fazendo a troca

T(n)=(((n-1) - 1) \* c) + c //multiplica c pelos termos

T(n)=(n-1)\*c – 1\*c + c //remove o 1

T(n)=(n-1)\*c – c + c // soma -c com +c

T(n)=(n-1)\*c (passo indutivo provado)

Demonstrado que T(n-1) + c = (n-1) \* c para n > 1

2ª Forma de resolução

T(n)= T(n-1) + c

T(n)= T(n-2) + c + c

T(n)= T(n-3) + c + c + c

T(n)= T(n-4) + c + c + c + c

T(n)= T(n-(n-1)) + c + ... + c + c ( n-1 vezes)

Portanto para n = 5

T(5)= T(5-4) + c + c + c + c

T(5)= T(5-4) + c + c + c + c

T(5)= T(1) + c + c + c => T(1)=0

T(5)= 0 + c + c + c + c

T(5)= 4 \* c

ou

T(n)=(n-1)\*c

T(n)= (n-1) c ou T(n)=

T(n)=Θ(n)

Em n passos temos a soma de (n -1)c do primeiro passo que é 0, então

T(n)= (n-1)c ϵ Θ(n)

3ª Forma de resolução

Tomando como exemplo n = 5 temos:

T(5)= T(5-1) + c

T(5)= T(4) + c

T(5)= T(4-1) + c + c

T(5)= T(3) + c + c

T(5)= T(3-1) + c + c + c

T(5)= T(2) + c + c + c

T(5)= T(2-1) + c + c + c + c

T(5)= T(1) + c + c + c + c => T(1)=0

T(5)= 0 + c + c + c + c

T(5)= 4c equivale a: T(n)= (n-1) c

Logo a complexidade da fórmula,

T(n)= (n-1)c ϵ Θ(n)

(b) **T(1) = 0 ; T(n) = T(n - 1) +**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) = T(n - 1) +

2) T(n) está escrito em função de T(n-1)

3) Isole as equações para T(n-1) e T(n-2):

T(n-1) = T(n - 2) +

T(n-2) = T(n - 3) +

4) Substitua T(n-1) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n-2)

* Substituindo o valor isolado de T(n-1) em

T(n) = T(n - 1) +

Temos

T(n) = (T(n - 2) + ) +

* Agora substituindo o valor de T(n-2) em

T(n) = (T(n - 2) + ) +

Temos

T(n) = ((T(n - 3)+ )+ ) +

**Forma geral**

T(n) = T(n – (k+1))+ + + ... + +

Considerando k=n

T(n) = T(n –(n+1))+ + + ... + +

T(n) = T(1)+ + + ... + //Não pode ter e 2^0 2^1 pois T(1) = 0

Considerando

//A.5 Página 832 CLRS (3ed)

A série geométrica

+ + ... + =

Trocando k por n

T(n) = T(1)+ //Necessário tirar o primeiro e o segundo termo

T(n) = 0+

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

Calculado para n=4

T(4) = T(4 – 1) +

T(4) = T(3) +

T(3) = T(3 - 1) +

T(3) = T(2) +

T(2) = T(1) +

T(2) = T(1) + => T(1) = 0

T(2) =

T(2) =

T(3) =

T(3) =

T(4) =

T(4) = //

T(4) =

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

T(n - i) <-> T(1) <-> 0

n - i = 0

i = -n

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) = T(n-i) +

T(n) = T(1) +

T(n) = 0 +

T(n) =

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n)= T(n -1) + ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é 0

T(n) =

T(1) =

T(1) =

T(1) = 0 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n-1, isto é, T(n-1) = . Então, temos que verificar se T(n) = , sabendo-se que T(n) = e partindo da H.I. que T(n-1) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) = //Adicione e para obter

T(n) = //Use a regra da potência para combinar os expoentes

T(n) = (passo indutivo provado)

Demonstrado que T(n - 1) + = para n > 1

2ª Forma de resolução

T(n) = T(n-1) +

T(n) = T(n-2) + +

T(n) = T(n-3) + + +

T(n) = T(n-4) + + + +

Portanto para n = 4

T(4)= T(4-4) + + ++

T(4)= T(0) + ++

T(4)= 0 + ++ //Subtrair os dois primeiros termos da pg

T(n) = T(n - n)+ + + ... + +

T(n)= ou T(n)= //Para subtrair os dois primeiros termos

T(n)=Θ()

3ª Forma de resolução

Tomando como exemplo n = 4 temos:

T(4)= T(4 - 1) +

T(4)= T(3) +

T(4)= T(3 - 1) + +

T(4)= T(2) + +

T(4)= T(2 - 1) + + +

T(4)= T(1) + + +

T(4)= T(1) + + + =>T(1) =0

T(4)= 0 + + +

ou

T(4)= T(1) + + +

T(4)= 0 + + + =>T(1) =0

T(4)= 0 + + +

Equivale a:

T(n)=

Logo a complexidade da fórmula,

T(n)= -4 ϵ Θ()

(c) **T(1) = k ; T(n) = cT(n - 1) ; c, k constantes e n > 0**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

**1) Fórmula original**

T(n) = c\*T(n - 1)

2) T(n) está escrito em função de T(n-1)

T(n) = c\*T(n - 1)

3) Isole as equações para T(n-1) e T(n-2):

T(n-1) = c\*T(n-2)

T(n-2) = c\*T(n-3)

4) Substitua T(n-1) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n-2)

* Substituindo o valor isolado de T(n-1) em

T(n) = c\*T(n-1)

Temos

T(n) = c \* c \* T(n-2)

* Agora substituindo o valor de T(n-2) em

T(n) = c \* c \* T(n-2)

Temos

T(n) = c \* c \* c \* T(n-3)

ou

T(n) = T(n-3)

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) = \*T(n - i)

Calculado para n=5

T(5)= c \* T(5-1)

T(5)= c \* T(4)

T(4)= c\*T(4-1)

T(4)= c\*T(3)

T(3)= c\*T(3-1)

T(3)= c\*T(2)

T(2)= c\*T(2-1)

T(2)= c\*T(1)

T(1)= k

T(2)= c \* T(1)

T(2)= c \* k

T(3)= c \* T(2)

T(3)= c \* c \* k

T(4)= c \* T(3)

T(4)= c \* c \* c \* k

T(5)= c \* T(4)

T(5)= c \* c \* c \* c \* k

T(5)= \* k

ou

T(5)= \* k

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

T(n- i) ⬄ T(1) ⬄ k

n - i = k

i = n - k

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =\*T(n - i)

T(n) = \*k

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = cT(n - 1) ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) = \*k

T(1) = \*k

T(1) = \*k

T(1) = k (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n-1, isto é, T(n-1) . Então, temos que verificar se T(n) = \*k, sabendo-se que T(n) = e partindo da H.I. que T(n-1) .

T(n) = //Fazendo a troca

T(n) = //Use a regra da potência para combinar os expoentes

T(n) =

T(n) = (passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

2ª Forma de resolução

T(n) = c \* T(n - 1)

T(n) = c \* c \* T(n-2)

T(n) = c \* c \* c \* T(n-3)

T(n) = c \* c \* c \* c \* T(n-4)

T(n) = c \* c \* c \* c \* T(n - (n-1)) (c é repetido n -1 vezes)

Portanto para n = 5

T(5) = c \* c \* c \* c \* T(5-4)

T(5) = c \* c \* c \* c \* T(1)

T(5) = c \* c \* c \* c \* T(1) => T(1)=k

T(5) = c \* c \* c \* c \* k

T(n) = \* k

Portanto:

T(n)=Θ()

3ª Forma de resolução

Tomando como exemplo n = 5 temos:

T(n) = c \* T(n - 1)

T(5) = c \* T(5 - 1)

T(5) = c \* T(4) => T(4) = c \* T(4-1)

T(5) = c \* c \*T(4 - 1)

T(5) = c \* c \*T(3)

T(5) = c \* c \* c \*T(3 - 1)

T(5) = c \* c \* c \*T(2)

T(5) = c \* c \* c \* c \*T(2 - 1)

T(5) = c \* c \* c \* c \*T(1) =>T(1) = k

T(5) = c \* c \* c \* c \* k

T(5) = \* k

Equivale a:

T(n) = \* k

Logo a complexidade da fórmula,

T(n)= \* k ϵ Θ()

(d) **T(1) = 1 ; T(n) = ; para n > 1**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T(n/2)

3) Isole as equações para T(n/2) e T(n/4):

T(n) =

T(n/2) =

T(n/2) =

**e**

T(n/2/2) =

T(n/4) =

T(n/4) =

4) Substitua T(n/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

* Substituindo o valor isolado de T(n/2) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

T(n) = Soma da PG a1= e q=

T(n) =

Calculado para n=8

T(8)=

T(8)=

T(4)=

T(4)=

T(2)=

T(2)=

T(1)=

T(2)=

T(4)=

T(4)=

T(8)=

T(8)=

T(8)=

T(8)=

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

⬄ T(1) ⬄ 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

**Forma geral**

T(n) =

Considerando

//A.5 Página 832 CLRS (3ed)

A série geométrica

(

Substituindo na fórmula do somatório

Trocando k por

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

Considerando i

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //n dividido por n é igual 1

T(n) = //T(1)=1

T(n) =

T(n) = //MMC de (3/2)-1

T(n) = //Subtrair 3/2 -2

T(n) = //Dividir por ½ é igual que multiplicar por 2

T(n) = //Remove a divisão por 1

T(n) = //Distribui a exponencial na fração (3/2)

T(n) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //Multiplica n por dois termos

T(n) = //Elimina n

T(n) =

T(n) = //Adicione e para obter

T(n) = 3. // Inverter o n por 3 pela propriedade

T(n) = 3.

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =

T(1) =

T(1) =

T(1) = 3.

T(1) =

T(1) = 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/2, isto é, T =. Então, temos que verificar se T(n) = , sabendo-se que T(n)= e partindo da H.I. que T =.

T(n)=

T =. //troca na equação anterior

T(n)= //Multiplica por n/2 por 2

T(n)= //Multiplica por 3 os 2 membros da equação

T(n)= //Soma n com -3n

T(n)= //Distribui o exponencial na fração (n/2)

T(n)= // Propriedade é igual a c portanto =3

T(n)= // Elimina um 3 da divisão com outro da multiplicação

T(n)= // (passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

(e) **T(1) = 1 ; T(n) = T() + log n ; para n >= 1**

A equação pode ser simplificada através de manipulação algébrica. Substituindo-se log *n* por *m*: (Obs. cormen p 64 e exercício 4.3.9)

Desta forma temos que:

ou

Desta forma podemos reescrever a recorrência da seguinte forma

Transforma-se em

T() = T( // //o log é na base 2

T() = T( //

T() = T() + m

Agora, realizando manipulação algébrica de simplificação fazemos a substituição da função em

T() = T() + m

usando-se a igualdade , temos

S() = S() + m

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

S(m) =

2) S(n) está escrito em função de

3) Isole as equações para e :

S(m) =

S(m/2) =

S(m/2) =

e

S(m/2/2) =

S(m/4) =

4) Substitua S(m/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para S(m/4)

* Substituindo o valor isolado de S(m/2) em
* S(m) =

Temos

S(m) =

* Agora substituindo o valor de S(m/4) em

S(m) =

Temos

S(m) =

S(m) =

S(m) =

S(m) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

S(m) =

S(m) = Soma da PG a1= e q=

S(m) =

Calculado para n=8

S(8)=

S(8)=

S(4)=

S(4)=

S(2)=

S(2)=

S(1)=

S(2)=

S(4)=

T(4)=

T(8)=

T(8)=

T(8)=

T(n) =

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

<-> T(1) <-> 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

S(m) =

**Forma geral**

S(m) =

Considerando que a quantidade de termos é

S(m) =

S(m) =

S(m) =

S(m) =

Considerando

//A.5 Página 832 CLRS (3ed)

A série geométrica substituir k =

//Substituindo na fórmula do somatório

Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

S(m) =

S(m) =

Considerando i

S(m) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

//m dividido por m é igual 1

//Dividir por -½ é igual que multiplicar por -2

//Retira divisão por 1

//Distribui a exponencial na fração (1/2)

//Distribui a exponencial na fração (1/2)

//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

//Um elevado a qualquer potência é um

//Um elevado a qualquer potência é um

//Multiplica -2m pelos termos

//Multiplica -2m pelos termos

//realiza a subtração

Como S(m) = T(), ou seja m = , fazemos a substituição em

Temos

Pela fórmula inicial, sabemos que

T(2) = T() + 1

T() = T() +

T() = T() + +

...

Portanto

T(2) = T( ]

Temos uma PG infinita entre os colchetes, cuja a equação é

//A.6 Página 833 CLRS (3ed)

Sendo o primeiro elemento igual a 1 e a razão igual ½ (e k tende ao infinito) temos:

T(2) = T( ]

T(2) = T(

T(2) = T(1

Substituindo em:

Por fim, como = troque em

Resultando em

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ( )

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é 1

(Correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para , isto é, T =. Então, temos que verificar se , sabendo-se T(n)= e partindo da H:I: que T =.

T(n)=

T(n)=

T(n)=

T(n)= (passo indutivo provado)

Demonstrado que para n >= 1

(f) **T(1) = 1 ; T(n) = 8T(n/2) + n**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T(n/2)

3) Isole as equações para T(n/2) e T(n/4):

T(n) =

T(n/2) =

T(n/2) =

**e**

T(n/2/2) =

T(n/4) =

T(n/4) =

4) Substitua T(n/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

* Substituindo o valor isolado de T(n/2) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

T(n) = Soma da PG a1= e q=

T(n) =

Calculado para n=512

T(512)= //i=3

T(512)=

T(64)=//i=2

T(64)=

T(8)= //i=1

T(8)=

T(1) = 1

T(8)=

T(64) =

T(512) =

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

⬄ T(1) ⬄ 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

**Forma geral**

T(n) =

Considerando

//A.5 Página 832 CLRS (3ed)

A série geométrica x = 4

Substituindo na fórmula do somatório

Substituindo k =

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

Considerando i

T(n) =//8 é igual 2^3

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //n dividido por n é igual 1

T(n) = //T(1)=1

T(n) = //Subtrair 1 de 4

T(n) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //

T(n) = //Multiplica por n

T(n) = //MDC com n^3/1

T(n) =

T(n) =

T(n) =

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =

T(1) =

T(1) =

T(1) =

T(1) = 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/2, isto é, T =. Então, temos que verificar se T(n) = , sabendo-se que T(n)=e partindo da H.I. que T =.

T(n)=

T = //Distribui o exponencial na fração (n/3)

T = //Calcula 2^3

T = //Simplifica 4/8 dividindo por 4

T =// Mdc 2 e 2

T =// multiplica a fração por 1/3

T =//troca na equação anterior

T(n)=

T(n)= (passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

(g) **T(1) = 1 ; T(n) = T(n/3) + n**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T(n/3)

3) Isole as equações para T(n/3) e T(n/9):

T(n) =

T(n/3) =

T(n/3) =

**e**

T(n/3/3) =

T(n/9) =

4) Substitua T(n/3) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/3)

* Substituindo o valor isolado de T(n/3) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

T(n) = Soma da PG a1= e q=

T(n) =

Calculado para n=27

T(27)= //i=3

T(27)=

T(9)=//i=2

T(9)=

T(3)= //i=1

T(3)=

T(1) = 1

T(3)=

T(9)=

T(27) =

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

<-> T(1) <-> 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

**Forma geral**

T(n) =

Considerando

//A.5 Página 832 CLRS (3ed)

A série geométrica x = 4

//Substituindo na fórmula do somatório

Substituindo k =

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

Considerando i

T(n) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //n dividido por n é igual 1

T(n) = //T(1)=1

T(n) = //Subtrair 1 de 1/3

T(n) =//Dividir por -1/3 é igual que multiplicar por -3

T(n) =//Distribui a exponencial na fração (1/3)

T(n) =//1 elevando a qualquer número é 1

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //Multiplica 3n pelos membros da equação

T(n) = // 3n dividido por n é 3

T(n) =

T(n) =

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =

T(1) =

T(1) =

T(1) = 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/2, isto é, T =. Então, temos que verificar se T(n) = , sabendo-se que T(n) = e partindo da H.I. que T =.

T(n) =

T //Troca na equação anterior

T(n)= //Retire os parênteses

T(n)= //soma os membros

T(n)= (passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

(h) **T(1) = 1 ; T(n) =**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T()

3) Isole as equações para T(n/4) e T(n/16):

T(n) =

T(n/4) =

T(n/4) =

**e**

T(n/4/4) =

T(n/16) =

T(n/16) =

4) Substitua T(n/4) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

* Substituindo o valor isolado de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

T(n) =Soma da PG a1= e q=

T(n) =

Calculado para n=64

T(64)= //i=3

T(64)=

T(16)=//i=2

T(16)=

T(4)= //i=1

T(4)=

T(1) = 1

T(4)=

T(16) =7

T(64) =

ou

T(n)=\*n

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

⬄ T(1) ⬄ 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

**Forma geral**

T(n) =

Considerando

//A.5 Página 832 CLRS (3ed)

A série geométrica k = e x = 7/4

Substituindo na fórmula do somatório

//Soma +1 e -1

Substituindo k =

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

Considerando i

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //n dividido por n é igual 1

T(n) = // T(1)=1

T(n) = // //MMC de (7/4)-1

T(n) = //Subtrai 7-4

T(n) = //Dividir por 3/4 é igual que multiplicar por 4

T(n) = // Distribui a exponencial na fração (7/4)

T(n) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = // Inverter o n por 7 pela propriedade

T(n) = // Subtrair -1 no log por causa da divisão

T(n) = // Multiplicar por n

T(n) = // Dividir por MDC 3

T(n) = // Multiplicar por 4n propriedade distributiva

T(n) = // Use regra de potência

T(n) = // somar +1 e -1

T(n) = // somar os termos semelhantes

T(n) =

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =

T(1) =

T(1) =

T(1) =

T(1) = 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, T =. Então, temos que verificar se T(n) = , sabendo-se que T(n)=e partindo da H.I. que T =.

T(n)=

T = // Dividir 4 por 4

T = // Distribui o exponencial na fração (n/4)

T = // Inverter o 4 por 7 pela propriedade

T = // =1

T = // Dividir 7 por 7

T = // troca na equação anterior

T(n)= //Multiplica por 7

T(n)= //MDC de 3 e 1

T(n)= //Multiplica por 7

T(n)= //Soma os termos semelhantes

T(n)= // (passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

(i) **T(1) = 1 ; T(n) =**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T()

3) Isole as equações para T(n/4) e T(n/16):

T(n) =

T(n/4) =

T(n/4) =

**e**

T(n/4/4) =

T(n/16) =

T(n/16) =

4) Substitua T(n/4) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

* Substituindo o valor isolado de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) = //Distribui a exponenciação

T(n) = //Isola o n^2

T(n) = //16 é igual a 4^2

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

T(n) = Soma da PG a1=e q=

T(n) =

Calculado para n=64

T(64)= //i=3

T(64)=

T(16)=//i=2

T(16)=

T(4)= //i=1

T(4)=

T(1) = 1

T(4)=

T(16) =

T(64) =

ou

T(n)=\*

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

⬄ T(1) ⬄ 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

**Forma geral**

T(n) =

Considerando

//A.5 Página 8332 CLRS (3ed)

A série geométrica k = e x =

//Substituindo na fórmula do somatório

//Soma +1 e -1

Substituindo k =

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

Considerando i

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //n dividido por n é igual 1

T(n) = //T(1)=1

T(n) = //MMC de (1/(4^2))-1

T(n) = //Subtrai 1-4^2

T(n) = //Dividir por -15/(4^2) é igual que multiplicar por -4^2

T(n) = //Distribui a exponencial na fração (1/(4^2))

T(n) = //Um elevando a qualquer coisa é 1

T(n) = //4^2 é igual 16

T(n) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //leva no n^2 para junto do 4^2

T(n) = //MDC de n^2 e 1

T(n) = //Dividir por 15 é igual a multiplicar por 1/15

T(n) = //Multiplica por 1/15

T(n) = //Multiplica corta n^2

T(n) = //Multiplique por 4^2=16

T(n) = //Multiplique por

T(n) = //Multiplique por 16

T(n) = //Multiplique por -16-16n

T(n) = //-16n +16n = 0

T(n) = //15 - 16

T(n) = //Reordena os elementos

T(n) =

ou

T(n) =

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(1) = 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, T =. Então, temos que verificar se T(n) , sabendo-se que T(n) = e partindo da H.I. que T =.

T(n)=.

T =//Simplificando multiplicação por 4 e divisão por 4

T = // troca na equação anterior

T =

T =

T =

T =

T =

ou

T = // (passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

(j) **T(1) = 1 ; T(n) = 3T(n/4) +**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T()

3) Isole as equações para T(n/4) e T(n/16):

T(n) =

T(n/4) =

T(n/4) =

**e**

T(n/4/4) =

T(n/16) =

T(n/16) =

4) Substitua T(n/4) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

* Substituindo o valor isolado de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/16) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) = //Distribui a exponenciação

T(n) = //Isola o n^2

T(n) = //16 é igual a 4^2

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

T(n) =

T(n) = Soma da PG a1 = e q =

T(n) =

Calculado para n=64

T(64)= //i=3

T(64)=

T(16)=//i=2

T(16)=

T(4)= //i=1

T(4)=

T(1) = 1

T(4)=

T(16) =

T(64) =

ou

T(n)= \*

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

⬄ T(1) ⬄ 1

= 1

= 1

= => equivale

7) Substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

T(n)

**Forma geral**

T(n) =

Considerando

//A.5 Página 833 CLRS (3ed)

A série geométrica x =

//Substituindo na fórmula do somatório

//Soma +1 e -1

Substituindo k =

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

T(n) =

Considerando i

T(n) =//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = //n dividido por n é igual 1

T(n) = // T(1)=1

T(n) = // MDC de (3/4^2)-1

T(n) = //Subtrai 3-4^2

T(n) = //Dividir por -13/4^2 é igual que multiplicar por -4^2/13

T(n) = // Distribui a exponencial na fração (3/4^2)

T(n) = //2^4-16

T(n) = //Propriedade

T(n) = //

T(n) = //Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

T(n) = // MDC n^2 e 1

T(n) = //Multiplica por

T(n) = //Corta

T(n) = //Multiplica por -4^2

T(n) = //MMC 1 e 13

T(n) = //4^2-16

T(n) = //Subtrai

T(n) =

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

O crescimento de uma função é maior

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

T(n) =

T(1)

T(1) =

T(1) =

T(1) = 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, T =. Então, temos que verificar se T(n) , sabendo-se que T(n) =e partindo da H.I. que T =.

T(n)=

T = // troca na equação anterior

T(n)=//Distribui o exponencial na fração

T(n)= //Propriedade

T(n)= //Propriedade e corta 16 com 16

T(n)= //Corta o 3

T(n)= //Multiplica por 3

T(n)= //MDC de 13 e 1

T(n)= //Soma termos semelhantes

T(n)= (Passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n > 1

(k) **T(1) = 1 ; T(n) = 4T(n/2) + lg n**

1ª Forma de resolução (segundos slides aula0901)

1) Fórmula original

T(n) =

2) T(n) está escrito em função de T()

3) Isole as equações para T(n/2) e T(n/4):

T(n) =

T(n/2) =

T(n/2) =

**e**

T(n/2/2) =

T(n/4) =

4) Substitua T(n/2) pelo valor que foi isolado acima e, em seguida, o mesmo para T(n/4)

* Substituindo o valor isolado de T(n/2) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

* Agora substituindo o valor de T(n/4) em

T(n) =

Temos

T(n) =

Simplificando

T(n) =

T(n) =

T(n) = //Distribui a exponenciação

T(n) = //Corta 4^i

T(n) = //Transforma o denominador em 2^i

T(n) = //Isola n^2

T(n) = //Propriedade de log (

T(n) =

T(n) = ]

T(n) = //calcula o log 2

T(n) = //agrupa termos semelhantes

T(n) = //Soma os logs

T(n) = //Inverte o sinal

T(n) = //Temos uma PA de 0 até 2

T(n) = //Multiplica por n^2

T(n) =

5) Identifique a fórmula do i-ésimo passo

[Somatório da PG a1=0 q=1/2]]

]

Calculado para n=8

T(8)=//i=3

T(8)=

T(4)=//i=2

T(4)=

T(2)=//i=1

T(2)=

T(1) = 1

T(2)=

T(4) =

T(8) =

6) Descubra o valor de i de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base

⬄ T(1) ⬄ 1

= 1

= 1

= => equivale

7) substitua o valor de i na fórmula do i-ésimo caso

]

**Forma geral**

Considerando

//A.1 Página 832 CLRS (3ed)

A série aritmética

//Substituindo na fórmula do somatório

//Soma +1 e -1

//multiplica k

//divide por 2

Substituindo k =

//Substituindo o resultado do somatório na fórmula do i-ésimo caso

]

Considerando i

//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

//Propriedade(funções exponencial e logarítmica são inversas

// n/n igual a 1

// T(1) = 1

// Subtrai os logs

// MDC de 1, 1, 2

// Soma termos semelhantes

// Isola n^2

8) Logo a complexidade da fórmula,

T(n) = ϵ Θ()

9) Prova por indução,

**Passo base**: para n = 1, o resultado esperado é k

)

= 1 (correto)

**Passo indutivo**: por hipótese de indução, assumimos que a fórmula está correta para n/4, isto é, . Então, temos que verificar se , sabendo-se que T(n) =e partindo da H.I. que .

T(n)= //trocar T(n/2) por

T(n)= //Distribui exponencial

T(n)= //Multiplica por 4

T(n)= //Corta o 4

T(n)= //Propriedade de log (

T(n)= // Calcula log 2=1

T(n)= //Troca por

T(n)= //Multiplica

T(n)= //Retira os parênteses

T(n)=// T(n)=//+1 e -1

T(n)= //-log n +log n

T(n)= //multiplica n^2

T(n)= //MDC 2 e 1

T(n)= // Multiplica n^2

T(n)= //Multiplica n^2

T(n)= //soma elementos semelhantes -n^2 log com +2n^2 log n

T(n)== //Isola n^2

T(n)== //Isola n^2 para fora da fração

T(n)= (Passo indutivo provado)

Demonstrado que = para n >= 1